线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性空间

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

子空间的基与维数

定理

向量空间 $\mathbb{F}^n$ 的任意子空间都可以由有限个向量生成.

推论

对于任意 $\mathbb{F}^n$ 的子空间 V, 存在一组线性无关的向量 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 使得

$$V = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \rangle.$$

定义 (基)

设 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间. 若向量组 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$

- 线性无关, 且
- 生成子空间 V,

则称 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 为 V 的一组基. 称基中向量的个数 r 为子空间 V 的维数.

性质 (坐标)

设向量组 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 为 V 的一组基. 则任意 $\vec{a} \in V$ 可唯一地表示为 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 的线性组合. 即, 存在唯一的一组数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{F}$ 使得

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{a}_r.$$

称 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ 为 $\vec{a}$ 在基 $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r\}$ 下的坐标.

$$\begin{array}{ccc} \text{空间} & \xrightarrow[1:1]{\text{坐标系}} & \mathbb{R}^3 \\ \text{点} & \longmapsto & \text{点在坐标系下的坐标} \end{array}$$

推广

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^n \text{ 的 } r \text{ 维子空间} & \xrightarrow[1:1]{\text{基}} & \mathbb{F}^r \\ \text{向量} & \longmapsto & \text{向量在基下的坐标} \end{array}$$

设 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 和 $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_r$ 为 V 的两组基. 设向量 $v\in V$ 在两组基下的坐标分别为 $X=(x_1,\cdots,x_r)^T$ 和 $Y=(y_1,\cdots,y_r)^T$. 即,

$$v=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)X=(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_r)Y.$$

问题: 如何确定 X 和 Y 之间的关系?

性质

设 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 和 $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_r$ 为 V 的两组基. 则

1. 存在唯一 r 阶方阵 T 使得
$$(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_r)=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)T.$$
矩阵 T 称为从基 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 到基 $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_r$ 的过渡矩阵.
2. 设向量 $v\in V$ 在两组基下的坐标分别为 $X=\begin{pmatrix}x_1, & \cdots, & x_r\end{pmatrix}^T$ 和 $Y=\begin{pmatrix}y_1, & \cdots, & y_r\end{pmatrix}^T$. 则
$$X=TY. \qquad \text{(坐标变换公式)}$$

注: 过渡矩阵 T 总是可逆的.

扩充基

定理 (扩充基)

设 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的 r 维子空间. 设 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s$ 为 V 中一组线性无关向量. 则 $s \leq r$ 且存在 $\vec{a}_{s+1}, \cdots, \vec{a}_r \in V$ 使得 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 构成 V 的一组基. 称 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r$ 为 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_s$ 的一组扩充基.

性质

设 U 和 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的两个子空间.

1. 若 $\dim(V) = r$, 则 V 中的任意 $r+1$ 个向量线性相关;
2. 若 $\dim(V) = r$ 且 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \in V$ 线性无关, 则 $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r\}$ 为 V 的一组基.
3. 若 $U \subseteq V$, 则 $\dim U \leq \dim V$.
4. 若 $U \subseteq V$ 且 $\dim U = \dim V$, 则 $U = V$.

注：这些性质说明维数很好地反映子空间的大小.

解空间

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, b \in \mathbb{F}^m$ 为非零向量. 则

1. $V := \{X \in \mathbb{F}^n \mid AX = 0\}$ 为子空间;
2. $W := \{X \in \mathbb{F}^n \mid AX = b\}$ 不是子空间.

接下来学习 V 和 W 更进一步地性质.

定理

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, b \in \mathbb{F}^m$. 则

1. $AX = b$ 有解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b)$.
2. $AX = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, b) = n$.

定义 (基础解系)

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 称解空间

$$V = \{X \in \mathbb{F}^n \mid AX = 0\}$$

的一组基为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系.

定理 (解空间大小)

$$\dim(V) = n - \operatorname{rank}(A).$$

证明思路: 设 $A = P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}Q$ (P, Q 可逆). 记 $\vec{\eta}_i = Q^{-1}\vec{e}_i$, 以及

$W := \left\{ y \in \mathbb{F}^n \,\middle|\, \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} y = 0 \right\} = \langle \vec{e}_{r+1}, \cdots, \vec{e}_n \rangle.$

则 $\vec{\eta}_{r+1}, \cdots, \vec{\eta}_n$ 为 V 的一组基.

给定矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. 通过 $\mathcal{A}(\vec{x}) := A\vec{x}$, 我们可定义一个线性映射

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m.$$

性质

线性映射 $\mathcal{A}$ 的核正好为齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间. 即

$$\ker \mathcal{A} = \{X \in \mathbb{F}^n \mid AX = 0\}.$$

此外, 我们还有

性质

- 线性映射 $\mathcal{A}$ 的像由 A 的全体列向量生成;
- $\dim(\ker \mathcal{A}) + \dim(\mathrm{im}\mathcal{A}) = n.$

如何描述非齐次线性方程组的解空间?

$$W := \{X \in \mathbb{F}^n \mid AX = b\}$$

W 和 V 有什么联系? 基本事实:

- $\forall \alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in V$.
- $\forall \alpha \in W, \gamma \in V \Rightarrow \alpha + \gamma \in W$.

定理

若 W 非空, 任取 $\gamma_0 \in W$, 记 $\gamma_0 + V := \{\gamma_0 + \alpha \mid \alpha \in V\}$. 则

$$W = \gamma_0 + V.$$

几何解释?

一般线性空间

n 维数组空间 = 赋予了加法和数乘运算的 n 维数组向量组成的集合.

$$\begin{tikzcd}
& \text{加法, 数乘} \arrow[r] & \text{线性组合} \arrow[r] & \text{线性相关 (无关), 等价} \arrow[d] \\
& \text{秩, 基, 维数} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \text{极大无关组} \arrow[ll] \\
\text{坐标} & \text{过渡矩阵} & \text{扩充基} &
\end{tikzcd}$$

问题: 能否赋予其他集合 "+" 和 "·", 使得其满足类似的性质和结构?

例

$\mathbb{F}_n[x] := \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{F}\text{对所有的}i = 1, \cdots, n\}$.

- 加法
  $(a_0 + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + \cdots + b_nx^n) := (a_0 + b_0) + \cdots + (a_n + b_n)x^n$;
- 数乘 $\lambda(a_0 + \cdots + a_nx^n) := (\lambda a_0) + \cdots + (\lambda a_n)x^n$.

$\Rightarrow$ 多项式的线性相关, 线性无关, 极大无关组, 秩, 基.
e.g. $x^2 + 1, x^2, 1$ 线性相关, $1, x, \cdots, x^n$ 为一组基.

例

$\mathbb{F}^{m\times n}$ 数域 $\mathbb{F}$ 上的全体 $m\times n$ 矩阵.

- 矩阵的加法;
- 矩阵的数乘.

$\Rightarrow$ 矩阵的线性相关, 线性无关, 极大无关组, 秩, 基.

e.g. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 构成 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的一组基.

例

$E_n := \{a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b \mid a_i, b\in\mathbb{F}\}$.

- 加法 $(a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b)+(a_1'x_1+\cdots+a_n'x_n=b') := \Big((a_1+a_1')x_1+\cdots+(a_n+a_n')x_n=(b+b')\Big)$;
- 数乘 $\lambda(a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b)=(\lambda a_1x_1+\cdots+\lambda a_nx_n=\lambda b)$

$\Rightarrow$ 线性方程组的线性相关, 线性无关, 极大无关组 (等价的独立方程组), 秩 (独立方程的个数), 基.

一般线性空间定义

设 V 为一个非空集. $\mathbb{F}$ 为一个数域. 若 V 上存在两个运算

1. 加法: 任意 V 中的有序对 (α, β), 存在唯一的 $\gamma \in V$ 与之对应. 记为 $\alpha + \beta$. 即, $V \times V \to V \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$.
2. 数乘: 任意 $\lambda \in \mathbb{F}$, 任意 $\alpha \in V$, 存在唯一的 $\gamma \in V$ 与之对应. 记为 $\lambda\alpha$. 即, $\mathbb{F} \times V \to V \quad (\lambda, \alpha) \mapsto \lambda\alpha$.

满足如下规律 (八大公理):

1. A1): $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad (\forall \alpha, \beta)$;
2. A2): $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \quad (\forall \alpha, \beta, \gamma)$;
3. A3): $\exists \theta \in V \quad s.t. \quad \alpha + \theta = \alpha = \theta + \alpha, \quad (\forall \alpha)$, 这个 θ 也常记为 0;
4. A4): $\forall \alpha \quad \exists \beta \in V \quad s.t. \quad \alpha + (\beta) = \theta = (\beta) + \alpha$, 称 β 为 α 的负元记为 $-\alpha$, 定义减法为: $\gamma - \alpha = \gamma + (-\alpha)$;
5. D1): $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha, \quad (\forall \lambda, \mu, \alpha)$;
6. D2): $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta, \quad (\forall \lambda, \alpha, \beta)$;
7. M1): $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha, \quad (\forall \lambda, \mu, \alpha)$;
8. M2): $1\alpha = \alpha, \quad (\forall \alpha)$;

则称 V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. V 中的元素称为向量.

八条公理保证了抽象的线性空间有好的性质和结构.

例

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 上的一组向量. 若存在一组不全为零的常数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_m\alpha_m=\theta,$$

则存在 i 使得

$$\alpha_i=-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\alpha_1-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\alpha_{i-1}-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\alpha_{i+1}-\frac{\lambda_m}{\lambda_i}\alpha_m.$$

性质

设集合 V 上带有两个运算

$$\oplus\colon V\times V\to V \qquad \text{和} \qquad \odot\colon \mathbb{F}\times V\to V.$$

若存在正整数 n 和一个双射

$$\varphi\colon V\to \mathbb{F}^n$$

满足以下两条

1. $\varphi(a\oplus b)=\varphi(a)+\varphi(b) \quad (\forall a,b\in V)$;
2. $\varphi(\lambda\odot a)=\lambda\varphi(a) \quad (\forall a\in V), \forall\lambda\in\mathbb{F}$,

则 V 为 $\mathbb{F}$ 上的线性空间.

例

$\mathbb{F}=\mathbb{R}, V:=\mathbb{R}^+:=\{r\in\mathbb{R}\mid r>0\}, r_1\oplus r_2:=r_1r_2, \lambda\circ\alpha:=\alpha^\lambda.$